Universidad Simón Bolivar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Abr-Jul 2024
Matemáticas III (MA-1116)
1^{er} Examen Parcial (30 %)
Sección 2

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

1. Hallar (y justificar) para cuales valores de la constante k el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x + 3y + 4z = 1 \\ x + y + 2z = -1 \\ x + 3y + k^2 z = k+3 \end{cases}$$

   a.- No tiene solución (3 puntos)

   b.- Tiene solución única (3 puntos)

   c.- Tiene infinitas soluciones (describir las soluciones) (3 puntos)

2. Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   a.- Hallar $\operatorname{Adj}(A)$ y A^{-1} (5 puntos)

   b.- Hallar la solución del sistema $A^t x = b$ si $b = (-2, 0, 1)^t$ (3 puntos)

3. Sean A, B, C matrices cuadradas de tamaño 4, con $\det(A) = \frac{1}{2}$. Sea

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 18 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

   a.- Encontrar $\det(C)$ utilizando solo el método de cofactores (4 puntos)

   b.- Si $(CAB^{-1})^t B^{-1} = I$. Calcular $\det(B)$ (4 puntos)

4. Sea

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Sin hallar la matriz A, calcular:

   a.- $\det(A)$ (3 puntos)

   b.- El cofactor A_{24} (2 puntos)

SOLUCIÓN PREGUNTA 1

Se escribe el sistema de ecuaciones en su forma matricial matricial $A\vec{x} = \vec{b}$ donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & k^2 \end{pmatrix} \; ; \; \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \; ; \; \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ k+3 \end{pmatrix}$$

Ahora se reduce la matriz ampliada $(A \mid b)$ mediante operaciones elementales por filas.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & k^2 & k+3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4 \to F_4 - F_1]{\substack{F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & k^2-3 & k+3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & k^2-3 & k+3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4 \to F_4 - F_2]{F_3 \to F_3 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k^2-4 & k+2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k^2-4 & k+2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_4 \longleftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k^2-4 & k+2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Como $k^2 - 4$ es dependiente de k, no se puede seguir pivoteando. Ahora, se analiza el comportamiento del sistema para los distintos valores de k:

Caso 1. Si $k^2 - 4 = 0$, se obtienen dos casos, $k = 2$ o $k = -2$:

- Si $k = 2$, la matriz aumentada nos queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  De donde se obtiene que $0 = 4$, por lo tanto el sistema **es inconsistente**.

- Si $k = -2$, reemplazamos en la matriz aumentada y reducimos mediante Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \to F_1 - 2F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  Fijemonos que se tienen únicamente dos pivotes para tres variables, por lo tanto el sistema tiene **infinitas soluciones** si $k = -2$. A continuación, escribimos el sistema asociado y se despejan las variables en funcion de la variable sin pivote, en este caso z:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x + z & = & -2 \\ y + z & = & 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & -2 - z \\ y & = & 1 - z \end{array} \right.$$

Así, las infinitas soluciones del sistema vienen dadas por:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-z \\ 1-z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{R}$$

Caso 2. Si $k^2-4 \neq 0$, podemos generar el tercer pivote y seguir reduciendo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k^2-4 & k+2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to \frac{1}{k^2-4}F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/(k-2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 \to F_1 - 3F_3]{F_2 \to F_2 - F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -3/(k-2) \\ 0 & 1 & 0 & 1-1/(k-2) \\ 0 & 0 & 1 & 1/(k-2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1 \to F_1 - 2F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & (-2k+3)/(k-2) \\ 0 & 1 & 0 & (k-3)/(k-2) \\ 0 & 0 & 1 & 1/(k-2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Entonces, la solución del sistema está dada por:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2k+3)/(k-2) \\ (k-3)/(k-2) \\ 1/(k-2) \end{pmatrix}$$

De esta forma, el sistema tiene **solución única** si $k \neq -2$ y $k \neq 2$.

En conclusión:

- El sistema es inconsistente para $k = 2$.
- El sistema posee solución única para $k \neq -2$ y $k \neq 2$
- El sistema posee infinitas soluciones para $k = -2$, las cuales vienen dadas por:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{R}$$

SOLUCIÓN PREGUNTA 2

Inciso a:

- Por definición, la matriz adjunta, es la matriz de cofactores traspuesta, la cual viene dada por:
$$A_{ij} = (-1)^{i+j} det(M_{ij});$$
Con M_{ij} una matriz $(n-1)\times(n-1)$ que resulta tras cubir la i-ésima fila y la j-ésima columna de A.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{12} = (-1)\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{21} = (-1)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -6 \qquad A_{23} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{32} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Así, la matriz adjunta de A viene dada por:

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & -6 & -2 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

- Para la matriz inversa, se tiene por definición que:
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\text{Adj}(A)$$
En este caso, sólo nos queda calcular $\det(A)$. Para ello, expandemos por cofactores en la fila 3:
$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (2)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (2)(4-3) = 2$$
Así, la matriz inversa de A viene dada por:
$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & -6 & -2 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

Inciso b:
Para hallar la solución del sistema, se debe despejar x, para ello multiplicamos en ambos lados de la ecuacion la matriz $(A^t)^{-1}$ la cual sabemos que existe ya que A es invertible. De esta forma:

$$(A^t)^{-1}A^t x = (A^t)^{-1}b \Leftrightarrow I_3 x = (A^t)^{-1}b \Leftrightarrow x = (A^t)^{-1}b$$

Luego, por propiedades de la matriz traspuesta se tiene que:

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

Es decir, para hallar la solución del sistema sólo debemos calcular la traspuesta de A^{-1} y multiplicar por el vector b.

$$x = (A^{-1})^t b = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -5 \\ 5/2 \end{pmatrix}$$

Finalmente, la solución del sistema es:

$$\boxed{x = \left(\frac{1}{2}, -5, \frac{5}{2}\right)^t}$$

SOLUCIÓN PREGUNTA 3

Inciso a:
Para calcular el determinante de la matriz C, lo óptimo es expandir cofactores a lo largo de la columna 2, ya que tiene un mayor numero de ceros, lo que implica realizar menos operaciones y asi evitar cometer errores en los cálculos. Recordemos que esto es válido, ya que se cumple que $\det(C^t) = \det(C)$. De esta forma:

$$\det(C) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 18 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (1)(18)\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Ahora expandimos cofactores a lo largo de la primera fila:

$$\begin{aligned} \det(C) = (18)\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} &= (18)\left[(1)(-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)(1)\cancelto{0}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} + (1)(3)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right] \\ &= (18)\left[(-1)(1\cdot 1 - 2\cdot 1) + (3)(1\cdot 2 - 1\cdot 1)\right] \\ &= (18)[(-1)(-1) + (3)(1)] \\ &= (18)[4] \\ &= 72 \end{aligned}$$

Así:

$$\boxed{\det(C) = 72}$$

Inciso b:
Para calcular el determinante de la matriz B, aplicamos el determinante en ambos lados de la ecuación y despejamos $\det(B)$ aplicando propiedades de los determinantes. Así:

$$\begin{aligned} (CAB^{-1})^t B^{-1} = I &\Rightarrow \det((CAB^{-1})^t B^{-1}) = \det(I) \\ &\Rightarrow \det((CAB^{-1})^t)\cdot \det(B^{-1}) = 1 \\ &\Rightarrow \det(CAB^{-1})\cdot \frac{1}{\det(B)} = 1 \\ &\Rightarrow \det(C)\cdot\det(A)\cdot\det(B^{-1})\cdot\frac{1}{\det(B)} = 1 \\ &\Rightarrow \det(C)\cdot\det(A)\cdot\frac{1}{\det(B)^2} = 1 \\ &\Rightarrow \det(B)^2 = \det(C)\cdot\det(A) \\ &\Rightarrow \det(B) = \sqrt{\det(C)\cdot\det(A)} \\ &\Rightarrow \det(B) = \sqrt{72\cdot\frac{1}{2}} = \sqrt{36} = 4 \end{aligned}$$

Finalmente:

$$\boxed{\det(B) = 4}$$

SOLUCIÓN PREGUNTA 4

Inciso a:
Recordemos que:

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \Rightarrow \det(A) = \frac{1}{\det(A^{-1})}$$

Por lo tanto, para calcular el $\det(A)$, sólo debemos calcular el determinante de su inversa. Para ello expandimos cofactores a lo largo de la columna 4:

$$\det(A^{-1}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

A continuación, expandimos cofactores a lo largo de la fila 1:

$$\begin{aligned}\det(A^{-1}) = (-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} &= (-1)\left[(1)(1)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)(-1)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\right] \\ &= (-1)[(0\cdot 1 - 2\cdot 1) + (3\cdot 1 - 1\cdot -1)] \\ &= (-1)[-2+4] \\ &= -2\end{aligned}$$

Así:

$$\boxed{\det(A) = -\frac{1}{2}}$$

Inciso b:
Recordemos que la matriz adjunta es la traspuesta de la matriz de cofactores. De esta forma, para este problema debemos calcular dicha matriz adjunta, para ello partimos de la relación de la inversa y la matriz adjunta:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\text{Adj}(A) \Leftrightarrow \det(A)A^{-1} = \text{Adj}(A)$$

Luego, sustituyendo se tiene que:

$$\begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ -3/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1/2 \\ 1/2 & -1 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{pmatrix}$$

Finalmente:

$$\boxed{A_{24} = -1}$$

Este examen fue resuelto y digitalizado en $\LaTeX$ por **Jesús Gutiérrez** para **GECOUSB**

Jesús Gutiérrez
20-10332
Ing. en Computación

gecousb.com.ve

Cualquier error en la resolución de los ejercicios, notificar a **20-10332@usb.ve**